Svolgimento di esercizio di calcolo delle probabilità.2

Quesito: Sia X una v. a. r., con densità uniforme nell'intervallo $[0,3]$. Calcolare $\sigma^2(e^X)$.

Soluzione: La densità $f(t)$ di X è del tipo $f(t) = c$ se $t \in [0,3]$, $f(t) = 0$ se $t \notin [0,1]$. Dalla condizione $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$, segue subito $c = \frac{1}{3}$. Si ha

$$\sigma^2(e^X) = E(e^{2X}) - E(e^X)^2,$$

$$E(e^X) = \int_{\mathbb{R}} e^t f(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^3 e^t dt = \frac{e^3-1}{3},$$

$$E(e^{2X}) = \int_{\mathbb{R}} e^{2t} f(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{2t} dt = \frac{e^6-1}{6},$$

da cui

$$\sigma^2(e^X) = \frac{e^6-1}{6} - (\frac{e^3-1}{3})^2 = \frac{e^6-1}{6} - \frac{e^6-2e^3+1}{9} = \frac{e^6+4e^3-5}{18}.$$